

УДК 539.8

И.И. Сафаров, М.Х. Тешаев, З.И. Болтаев

Бухарский инженерно-технологический институт

Республика Узбекистан, 105017, г. Бухара, ул. К. Муртазоева, 15
safarov54@mail.ru; (+99893) 625-08-15

СОБСТВЕННЫЕ ВОЛНЫ В ПРОСТРАНСТВЕННОМ ВЯЗКОУПРУГОМ ЦИЛИНДРЕ С РАДИАЛЬНОЙ ТРЕЩИНОЙ

Рассматривается распространение собственных волн в бесконечном вязкоупругом цилиндре с радиальной трещиной. Задача ставится в цилиндрической системе координат. Вязкоупругий цилиндр с радиальной трещиной является предельным случаем клина с углом 360° . С помощью уравнений Навье и физических уравнений получена система шести дифференциальных уравнений. После несложных преобразований получена спектральная краевая задача для системы обыкновенных дифференциальных уравнений в частных производных с комплексными коэффициентными, которая в дальнейшем решается методами прямых и ортогональной прогонки Годунова с сочетанием методом Мюллера на комплексной арифметике. Получены дисперсионные соотношения для вязкоупругого цилиндра с радиальной трещиной.

Ключевая слова: трещина; вязкоупругий цилиндр; процедура замораживания; уравнение Навье; ортогональная прогонка; обыкновенные дифференциальные уравнения.

© Сафаров И. И., Тешаев М. Х., Болтаев З. И., 2018

Работа выполнена при финансовой поддержке фонда фундаментальных исследований Ф-4-14 Республики Узбекистан.

Введение

Распространение волн в волноводах, представляющих собой стержень или трубу, рассмотрено во многих работах [1–10]. Одной из центральных задач динамической теории упругости является исследование распространения волн в клиновидных телах (или волноводах) [1, 2, 3]. Основными особенностями волновода являются протяженность в одном направлении, а также ограничение и локализация волнового пучка по другим направлениям. Эти волны повсюду по своей характеристике аналогичны волнам Лэмба. Учет демпфирующей способности материала волновода играет важную роль в динамическом поведении конструкции [4, 5]. Она приводит к заметному ослаблению собственных колебаний, существенному понижению амплитуд при вынужденных колебаниях и сглаживанию напряжений в зоне концентрации при колебаниях. Сложность решения объясняется многими причинами, например, реологическими свойствами реальных волноводов, не классических геометрических форм и т. п., что обуславливает большое разнообразие схематизированных моделей для описания в том или ином приближении реальных явлений и затрудняет создать единую математическую модель механической системы [6]. В работе вязкоупругий цилиндр с радиальной трещиной является предельным случаем клина с углом 360° . Разработаны методики решения и алгоритм для исследования распространения волн в вязкоупругом цилиндре с радиальной трещиной и клина с произвольным углом вершины.

1. Постановка задачи распространения волн в бесконечном цилиндре с радиальной трещиной

Пусть собственные (гармонические) волны распространяются в бесконечном вязкоупругом цилиндре с радиальной трещиной. Задача ставится в цилиндрической системе координат. Вязкоупругий цилиндр с радиальной трещиной считаем предельным случаем клина с углом 360° . Вязкоупругие свойства материалов описываются с помощью интеграла Больцмана–Вольтера. Связь между напряжениями и деформациями имеет следующий вид

$$\hat{\varepsilon}_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right), \quad \sigma_{ik} = \tilde{\lambda} \theta \delta_{ik} + 2\tilde{\mu} \hat{\varepsilon}_{ik}, \quad (1)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda} \varphi(t) &= \lambda_{01} \left[\varphi(t) - \int_0^t R_\lambda(t-\tau) \varphi(\tau) d\tau \right]; \\ \tilde{\mu} \varphi(t) &= \mu_{01} \left[\varphi(t) - \int_0^t R_\mu(t-\tau) \varphi(\tau) d\tau \right]. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь σ_{ik} – тензор напряжений, ε_{ik} – тензор деформаций, θ – объемная деформация, $\tilde{\lambda}$ и $\tilde{\mu}$ – операторные модули упругости [7, 8, 9], $\varphi(t)$ – произвольная функция времени; $R_\lambda(t-\tau)$ и $R_\mu(t-\tau)$ – ядра релаксации, λ_{01}, μ_{01} – мгновенные модули упругости.

Основные уравнения движения вязкоупругого цилиндрического механического волновода, занимающего область В, задаются следующими уравнениями [6]:

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \quad (3)$$

где σ_{ik} – тензор напряжений, ρ – плотность материала.

Принимаем интегральные члены в (2) малыми, тогда функция $\varphi(t) = \psi(t) e^{-i\omega_R t}$, где $\psi(t)$ – медленно меняющаяся функция времени, ω_R – действительная константа. Далее применяя процедуру замораживания [9], заменим соотношения (2)

приближенными

$$\begin{aligned} \bar{\lambda} \varphi &= \lambda_{01} \left[1 - \Gamma_\lambda^C(\omega_R) - i \Gamma_\lambda^S(\omega_R) \right]; \\ \bar{\mu} \varphi &= \mu_{01} \left[1 - \Gamma_\mu^C(\omega_R) - i \Gamma_\mu^S(\omega_R) \right] \varphi, \end{aligned}$$

$$\Gamma_\lambda^C(\omega_R) = \int_0^\infty R_\lambda(\tau) \cos \omega_R \tau d\tau, \quad \Gamma_\lambda^S(\omega_R) = \int_0^\infty R_\lambda(\tau) \sin \omega_R \tau d\tau,$$

где

$$\Gamma_\mu^C(\omega_R) = \int_0^\infty R_\mu(\tau) \cos \omega_R \tau d\tau, \quad \Gamma_\mu^S(\omega_R) = \int_0^\infty R_\mu(\tau) \sin \omega_R \tau d\tau$$

– соответственно косинус и синус образы Фурье ядра релаксации материала. В качестве примера вязкоупругого материала примем трех параметрическое ядро релаксации $R_\lambda(t) = R_\mu(t) = Ae^{-\beta t} / t^{1-\alpha}$. На функцию влияния $R(t - \tau)$ накладываются обычные требования интегрируемости, непрерывности (кроме $t = \tau$), знако-определенности и монотонности:

$$R > 0, \quad \frac{dR(t)}{dt} \leq 0, \quad 0 < \int_0^\infty R(t)dt < 1.$$

В цилиндрической системе координат уравнения (1)–(3) принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{r\varphi}}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} &= \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}; \\ \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{2\sigma_{r\varphi}}{r} + \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{z\varphi}}{\partial z} &= \rho \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial t^2}; \\ \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{\sigma_{zz}}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{z\varphi}}{\partial \varphi} &= \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}; \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r}; \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}; \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r}; \\ \varepsilon_{r\varphi} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} \right); \quad \varepsilon_{rz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right); \\ \varepsilon_{\varphi z} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \varphi} \right); \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \lambda \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial u_r}{\partial r}; \\ \sigma_{r\varphi} &= 2\mu \varepsilon_{r\varphi} = \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} \right); \\ \sigma_{rz} &= 2\mu \varepsilon_{rz} = \mu \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{\varphi\varphi} &= \bar{\lambda} \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + 2\bar{\mu} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r} \right); \\ \sigma_{\varphi z} &= \bar{\mu} \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \varphi} \right); \\ \sigma_{zz} &= \bar{\lambda} \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + 2\bar{\mu} \frac{\partial u_z}{\partial z},\end{aligned}\quad (6)$$

где $\sigma_{rr}, \sigma_{r\varphi}, \sigma_{rz}, \sigma_{\varphi\varphi}, \sigma_{\varphi z}, \sigma_{zz}$ – соответственно компоненты тензора напряжений; $\varepsilon_{rr}, \varepsilon_{r\varphi}, \varepsilon_{rz}, \varepsilon_{\varphi\varphi}, \varepsilon_{\varphi z}, \varepsilon_{zz}$ – соответственно компоненты тензора деформаций.

Связь между напряжениями и деформациями приведена в равенствах (1).

Соотношения (4), (5), (6) после тождественных алгебраических преобразований приводятся к системе шести дифференциальных уравнений, разрешенных относительно первой производной по радиальной координате [10, 11]

$$\left\{ \begin{aligned}\frac{\partial u_r}{\partial r} &= \frac{1}{K} \sigma_{rr} - \frac{\bar{\lambda}}{K} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right); \\ \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} &= \frac{1}{\bar{\mu}} \sigma_{r\varphi} - \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - u_\varphi \right); \\ \frac{\partial u_z}{\partial r} &= \frac{1}{\bar{\mu}} \sigma_{rz} - \frac{\partial u_r}{\partial z}; \\ \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} &= \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} - \frac{\tilde{\Lambda}}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial \varphi} - \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z}; \\ \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial r} &= \rho \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial t^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} [\sigma_{rr} - \tilde{\Lambda}] - \frac{2\sigma_{r\varphi}}{r} - \frac{\partial}{\partial z} \tilde{B}; \\ \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} &= \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial z} \left[\sigma_{rr} - 2\bar{\mu} \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \right] - \frac{\sigma_{rz}}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \tilde{B};\end{aligned}\right.\quad (7)$$

где введены обозначения

$$\tilde{A} = 2\bar{\mu} \left[\frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + u_r \right) \right];$$

$$\tilde{B} = \bar{\mu} \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \varphi} \right).$$

Краевые условия задаем в виде:

$$r = r_0 \rightarrow 0, R: \sigma_{rz} = \sigma_{rr} = \sigma_{r\varphi} = 0; \quad (8)$$

$$r = 0, 2\pi: u_\varphi = 0; \sigma_{\varphi z} = \sigma_{\varphi r} = 0, \quad (9)$$

условия (8) при $r = 0$, в физическом плане можно интерпретировать, как результат предельного перехода от полого цилиндра со свободной внутренней поверхностью к сплошному, при стремлении внутреннего радиуса к нулю.

2. Методы решения

В случае бегущих гармонических волн вдоль оси z решение краевой задачи (7), (8), (9) допускает разделение переменных [12, 13]

$$\begin{aligned} u_r &= w(r) \cos \frac{\varphi}{2} e^{i(kz - \omega t)}; \\ u_\varphi &= v(r) \sin \frac{\varphi}{2} e^{i(kz - \omega t)}; \\ u_z &= u(r) \cos \frac{\varphi}{2} e^{i(kz - \omega t)}; \\ \sigma_{rr} &= \sigma(r) \cos \frac{\varphi}{2} e^{i(kz - \omega t)}; \\ \sigma_{r\varphi} &= \tau_\varphi(r) \sin \frac{\varphi}{2} e^{i(kz - \omega t)}; \\ \sigma_{rz} &= \tau_z(r) \cos \frac{\varphi}{2} e^{i(kz - \omega t)}, \end{aligned} \quad (10)$$

где $w(r)$, $v(r)$, $u(r)$ – амплитуды перемещений, $\sigma(r)$, $\tau_\varphi(r)$, $\tau_z(r)$ – амплитуды напряжений (компоненты тензора напряжений), $\omega = \omega_R + i\omega_I$ – комплексная собственная частота, ω_R –

собственная частота распространения волн, ω_I – коэффициент демпфирования, k – волновое число, $C = \omega/k$ – фазовая скорость.

Для выяснения их физического смысла рассмотрим два случая:

1) $k = k_R$; $C = C_R + iC_b$, тогда решение (10) имеет вид синусоиды по z , амплитуда которой затухает по времени;

2) $k = k_R + ik_I$; $C = C_R$, тогда в каждой точке z колебания установившиеся, но по x затухают.

При подстановке (10) в (7), (8), (9), получаем спектральную краевую задачу для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с комплексными коэффициентами

$$\left\{ \begin{array}{l} w' = \frac{\sigma}{k} - \frac{\bar{\lambda}}{k} \left(ku + \frac{v}{2r} + \frac{w}{r} \right); \\ v' = \frac{\tau_\varphi}{\bar{\mu}} + \frac{\vartheta}{r} + \frac{w}{2r}; \\ u' = \frac{\tau_z}{\bar{\mu}} + kw; \\ \sigma' = -\omega^2 \rho w + \frac{\tilde{a}}{r} - \frac{\tau_\varphi}{2r} - k\tau_z; \\ \tau_\varphi' = -\omega^2 \rho \vartheta - \frac{2\tau_\varphi}{r} + (\sigma + \tilde{a}) \frac{1}{2r} - k\tilde{b}; \\ \tau_z' = -\omega^2 \rho u - \frac{\tau_z}{r} - \frac{\tilde{b}}{2r} + k(\sigma + 2\bar{\mu}(ku - w')), \end{array} \right. \quad (11)$$

$$(\dots)' = \frac{d}{dr}.$$

Здесь $\tilde{a} = 2\mu \left(\frac{\vartheta + w}{2r} - w' \right)$; $\tilde{b} = \mu \left(-\frac{u}{2r} - k\vartheta \right)$, с краевыми

условиями

$$\begin{array}{l} r = r_0 \rightarrow 0 : \sigma = \tau_\varphi = \tau_z = 0; \\ r = R : \quad \sigma = \tau_\varphi = \tau_z = 0. \end{array} \quad (12)$$

Таким образом, сформулирована спектральная краевая задача (11), (12), описывающая распространение гармонических волн в бесконечном цилиндре с радиальной трещиной. Отметим, что выбор краевых условий на гранях щели в виде (9) обусловило, в первую очередь, возможностью разделения переменных по координатам r и φ , что существенно упрощает решение исходной задачи. Разделение переменных возможно также в случае следующих краевых условий:

$$\begin{aligned} \varphi = 0: \quad \sigma_{\varphi\varphi} = 0; \quad u_r = u_z = 0; \\ \varphi = 2\pi: \sigma_{\varphi\varphi} = 0; \quad u_r = u_z = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Действительно, выполняя в (7), (8) замену переменных так, чтобы удовлетворяли условия (13)

$$\begin{aligned} u_r &= \tilde{w}(r) \sin \frac{\varphi}{2} e^{-i(kz - \omega t)}; \\ u_\varphi &= \tilde{g}(r) \cos \frac{\varphi}{2} e^{-i(kz - \omega t)}; \\ u_z &= \tilde{u}(r) \sin \frac{\varphi}{2} e^{-i(kz - \omega t)}; \\ \sigma_{rr} &= \tilde{\sigma}(r) \sin \frac{\varphi}{2} e^{-i(kz - \omega t)}; \\ \sigma_{r\varphi} &= \tau_\varphi(r) \cos \frac{\varphi}{2} e^{-i(kz - \omega t)}; \\ \sigma_{rz} &= \tau_z(r) \sin \frac{\varphi}{2} e^{-i(kz - \omega t)}; \end{aligned} \quad (14)$$

получаем спектральную краевую задачу, имеющую комплексные коэффициенты и корни

$$\begin{aligned} \tilde{w}' &= \frac{\tilde{\sigma}}{k} - \frac{\lambda}{k} \left(k\tilde{u} - \frac{\tilde{v}}{2r} + \frac{\tilde{w}}{r} \right); \\ \tilde{u}' &= \frac{\tilde{\tau}_\varphi}{\mu} + \frac{\tilde{v}}{r} - \frac{\tilde{w}}{2r}; \\ \tilde{u} &= \frac{\tilde{\tau}_z}{\mu} + k\tilde{w}; \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}' &= -\rho\omega^2\tilde{w} + \frac{2\mu}{r}\left(-\frac{\tilde{v}}{2r} + \frac{\tilde{w}}{r} - \tilde{w}'\right) + \frac{\tilde{\tau}_\varphi}{2r} - k\tilde{\tau}; \\ \tilde{\tau}'_\varphi &= -\rho\omega^2\tilde{v} - \frac{2\tilde{\tau}_\varphi}{r} - \frac{1}{2r}\left(\tilde{\sigma} + 2\mu\left(-\frac{\tilde{v}}{2r} + \frac{\tilde{w}}{r} - \tilde{w}'\right) - k\left(\frac{\tilde{u}}{2r} - k\tilde{v}\right)\right); \\ \tilde{\tau}'_z &= -\rho\omega^2\tilde{u} - \frac{\tilde{\tau}_z}{r} + \frac{\mu}{2r}\left(\frac{u}{2r} - k\tilde{v}\right) + k(\tilde{\sigma} + 2\mu(k\tilde{u} - \tilde{w}')).\end{aligned}$$

с краевыми условиями

$$\begin{aligned}r = r_0 \rightarrow 0: \tilde{\sigma} = \tilde{\tau}_\varphi = \tilde{\tau}_z = 0; \\ r = R: \tilde{\sigma} = \tilde{\tau}_\varphi = \tilde{\tau}_z = 0.\end{aligned}\tag{16}$$

Нетрудно видеть, что задача (15), (16) сводится к задаче (11), (12) с помощью замены

$$\tilde{\tau}_z = \tau_z, \quad \tilde{\tau}_\varphi = -\tau_\varphi, \quad \tilde{\sigma} = \sigma, \quad \tilde{w} = w, \quad \tilde{u}_\varphi = -u_\varphi, \quad \tilde{u}_z = u_z.$$

Решение задачи (11), (12) выполнялось методом ортогональной прогонки Годунова [14].

3. Численные результаты

Безразмерные величины в постановке задачи выбраны таким образом, что скорость сдвига C_s , плотность ρ и внешний радиус R имеют единичные значения.

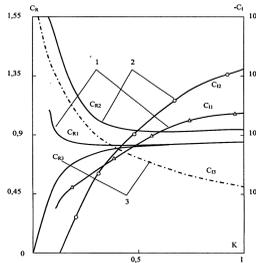


Рис. 1. Изменение реальной и мнимой части частоты колебаний по k :

- 1 – C_{R1}, C_{I1} – реальные и мнимые части первой моды комплексной фазовой скорости цилиндра с радиальной трещиной;
- 2 – C_{R2}, C_{I2} – реальные и мнимые части второй моды комплексной фазовой скорости цилиндра с радиальной трещиной;
- 3 – C_{R3}, C_{I3} – реальные и мнимые части первой моды комплексной фазовой скорости сплошного цилиндра

На рис. 1 показаны дисперсионные кривые первых двух мод колебаний в бесконечном вязкоупругом цилиндре с радиальной толщиной (кривые 1, 2

Для сравнения на этом же рисунке показана зависимость от волнового числа фазовой скорости первой изгибной моды колебаний сплошного цилиндра (кривая 3) без щели. Решение последней задачи было уже найдено ранее Похгомером и Кри с помощью специальных функций (5). Решение использовалось для тестирования задачи [3].

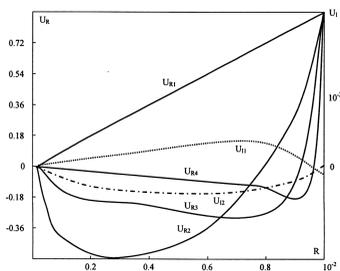


Рис. 2. Изменение реальной и мнимой части формы колебаний U_R и U_I в зависимости от R

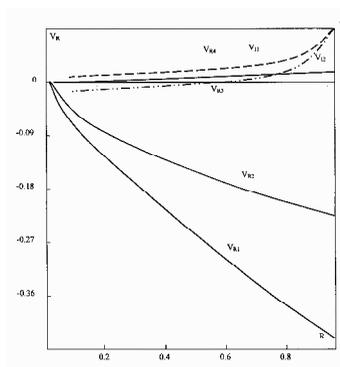


Рис. 3. Изменение реальной и мнимой части формы колебаний V_R и V_I в зависимости от R

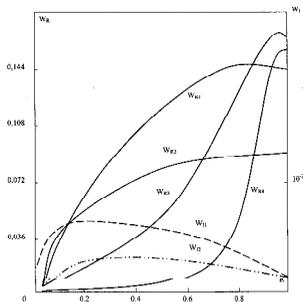


Рис. 4. Изменение реальной и мнимой части формы колебаний W_R и W_I в зависимости от R

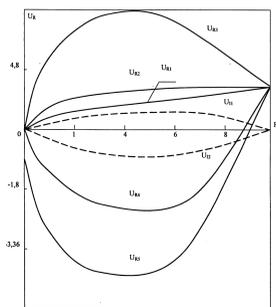


Рис. 5. Изменение реальной и мнимой части формы колебаний U_{R_i} в зависимости от R

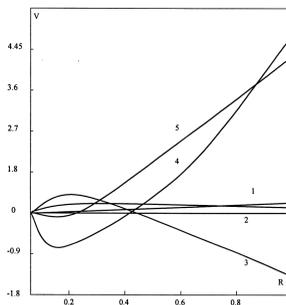


Рис. 6. Изменение абсолютных значений формы колебаний $V^2 = V_R^2 + V_I^2$ в зависимости от R

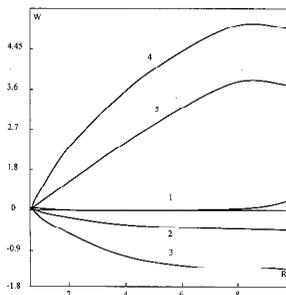


Рис. 7. Изменение абсолютных значений формы колебаний $W^2 = W_R^2 + W_I^2$ в зависимости от R

Отметим характерные особенности кривой 3: в нуле фазовая скорость равна нулю, а на бесконечности стремится к скорости волны Релея для полупространства. В случае цилиндра с радиальной трещиной первая мода имеет частоту отсечки, а фазовая скорость стремится к бесконечности.

При больших волновых числах предельная фазовая скорость этой моды также совпадает со скоростью волны Релея. На частоте отсечки осевые перемещения равны нулю и колебания цилиндра происходят в плоском деформированном состоянии.

У второй моды на частоте отсечки наблюдаются в $0 \leq k \leq 0.075$. Только реальные и мнимые части осевых перемещений, кольцевые и радиальные перемещения равны нулю. Эволюция форм части комплексных перемещений первой и второй моды в зависимости от волнового числа показаны на рис. 2–4 и 5–7 соответственно.

Кривые пронумерованы в порядке роста k . Отметим сильную зависимость форм от волнового числа. С ростом волнового числа на первой моде имеет место локализация колебаний вблизи внешней поверхности цилиндра. Характерно, что вторая мода, которая на малых волновых числах является формой преимущественно осевых колебаний, с ростом k постепенно превращается в форму преимущественно радиальных колебаний.

4. Волны в деформируемом клине с произвольным углом вершины

В этой части рассматривается распространение гармонических волн в бесконечном упругом клине с произвольным углом вершины. Для описания волнового процесса, используемые соотношения приведены в предыдущем параграфе (1), (2), (3). Разрешающая система уравнений совпадает с системой (7), также без изменения сохраняются краевые условия на поверхности (8). Краевые условия по φ для произвольного угла клина в случае свободной боковой поверхности следует записать в виде:

$$\varphi = -\frac{\varphi_0}{2}, \frac{\varphi_0}{2} : \quad \sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{\varphi r} = \sigma_{\varphi z} = 0, \quad (17)$$

где φ_0 – угол в вершине клина.

Гармонические волны, распространяющиеся вдоль оси z , суть решения краевой задачи (7), (8), (9), (17), периодические по z и по времени.

Условия периодичности позволяют исключить зависимость основных неизвестных от времени и осевой координаты z с помощью следующей замены переменных:

$$\begin{aligned} u_r &= w(r, \varphi) e^{i(\kappa z - \omega t)}; \\ u_\varphi &= v(r, \varphi) e^{i(\kappa z - \omega t)}; \\ u_z &= \tilde{u}(r, \varphi) e^{i(\kappa z - \omega t)}; \\ \sigma_{rr} &= \sigma(r, \varphi) e^{i(\kappa z - \omega t)}; \\ \sigma_{rz} &= \tau_z(r, \varphi) e^{i(\kappa z - \omega t)}; \\ \sigma_{r\varphi} &= \tau_\varphi(r, \varphi) e^{i(\kappa z - \omega t)}. \end{aligned} \quad (18)$$

При условии (17) разделение переменных r и φ , как и в предыдущем параграфе, уже невозможно.

С учетом (18) система уравнений (7) принимает вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} w' = \frac{\sigma}{k} - \frac{\bar{\lambda}}{k} \left(ku + \frac{1}{r} \left(w + \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right) \right) \\ v' = \frac{\tau_{\varphi}}{\bar{\mu}} + \frac{1}{r} \left(v - \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) \\ u' = \frac{\tau_z}{\bar{\mu}} + kw \\ \sigma' = -\omega^2 \rho w + \frac{1}{r} \left(A - \frac{\partial \tau_{\varphi}}{\partial \varphi} \right) - k \tau_z \\ \tau'_{\varphi} = -\omega^2 \rho v - \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(A + \sigma)}{\partial \varphi} + 2\tau_{\varphi} \right) - kB, \\ \tau'_{z} = -\omega^2 \rho u - \frac{1}{r} \left(\frac{\partial B}{\partial \varphi} + \tau_z \right) + k(\sigma + 2\bar{\mu}(ku - w')) \end{array} \right. \quad (19)$$

где $A = 2\bar{\mu} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} + w \right) - w' \right); B = \bar{\mu} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - kv \right).$

Аналогично преобразуются краевые условия (8)

$$r = 0, R : \sigma = \tau_{\varphi} = \tau_z = 0. \quad (20)$$

Нетрудно видеть, что компоненты тензора напряжения $\sigma_{\varphi\varphi}$, $\sigma_{\varphi z}$ и σ_{zz} выражаются через основные неизвестные по формулам:

$$\begin{aligned} \sigma_{\varphi\varphi} &= \sigma_{rr} + 2\bar{\mu} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_{\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r} - \frac{\partial u_r}{\partial r} \right); \\ \sigma_{\varphi z} &= \bar{\mu} \left(\frac{\partial u_z}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_{\varphi}}{\partial z} \right); \\ \sigma_{zz} &= \sigma_{rr} + 2\bar{\mu} \left(\frac{\partial u_z}{\partial z} - \frac{\partial u_r}{\partial r} \right). \end{aligned} \quad (21)$$

Тогда с учетом первого уравнения системы (21), краевые условия (20) принимают вид:

$$\sigma_\varphi = A + \sigma_r = a\sigma_r + b \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} + w \right) + cku = 0; \quad (22)$$

$$\varphi = -\frac{\varphi_0}{2}, \frac{\varphi_0}{2}: \quad \tau_\varphi = 0, B = \bar{\mu} \left(\frac{\partial u}{r \partial \varphi} - kr \right) = 0,$$

где $a = 1 + \frac{2\bar{\mu}}{k}$; $b = 2\bar{\mu} \left(1 + \frac{\bar{\lambda}}{k} \right)$, $c = 2\bar{\mu} \frac{\bar{\lambda}}{k}$.

Краевая задача для системы равнений в частных производных (19), (20), (22) может быть сведена к краевой задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с помощью метода прямых, что позволит использовать в решении программный аппарат метода ортогональной прогонки.

Согласно методу прямых прямоугольная область определения функции основных неизвестных покрывается прямыми, параллельными оси r и равномерно отстоящими друг от друга [17].

Решение ищется только на этих прямых, а производная по направлению φ , заменяется приближенными конечными разностями. Используемые аппроксимирующие формулы второго порядка для первой и второй производной имеют вид [14, 15]:

$$y_{i,\varphi} \cong \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2\Delta} \cong \frac{-3y_i + 4y_{i+1} - y_{i+2}}{2\Delta} \cong \frac{3y_i - 4y_{i-1} + y_{i-2}}{2\Delta}, \quad (23)$$

$$y''_{i,\varphi} \cong \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{\Delta^2}, \quad (24)$$

где i изменяется от 0 до $N+1$ ($i = 0, N+1$), y_i – проекция неизвестной функции на прямую с номером i ; Δ – шаг разбиения по координате φ .

В результате дискретизации вектор основных неизвестных общей размерности $6N$ может быть записан в виде:

$$Y = \left(\{w_i\}, \{v_i\}, \{u_i\}, \{\sigma_{ri}\}, \{\tau_{\varphi i}\}, \{\tau_{zi}\} \right)^T \quad i = \overline{1, N} \quad (25)$$

Центральные разности (23), (25) используются для внутренних прямых ($1 < i < N$), левая и правая разности (24), (25) позволяют учесть краевые условия по φ .

В первом случае производная по φ в правых частях системы уравнений (19) выражается по формулам:

$$\begin{aligned}
 & 1 < i < N \\
 w_{i,\varphi} &= (w_{i+1} - w_{i-1})/2\Delta; \quad u_{i,\varphi} = (u_{i+1} - u_{i-1})/2\Delta; \\
 v_{i,\varphi} &= (v_{i+1} - v_{i-1})/2\Delta; \quad \tau_{\varphi_i,\varphi} = (\tau_{\varphi(i+1)} - \tau_{\varphi(i-1)})/2\Delta \\
 \tau_{\varphi_i,\varphi} &= (\tau_{\varphi(i+1)} - \tau_{\varphi(i-1)})/2\Delta; \\
 \sigma_{\varphi_i,\varphi} &= a(\sigma_{i+1} - \sigma_{i-1})/2\Delta + \frac{b}{r}[(v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1})/\Delta^2 + w_{i,\varphi}] + cku_{i,\varphi}; \\
 B_i &= (u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1})/\Delta^2 / k - kv_{i,\varphi}.
 \end{aligned} \tag{26}$$

Краевые условия при $\varphi = -\frac{\varphi_0}{2}$ учитываются в уравнениях, соответствующих прямым $i = I$. Для основных неизвестных, не входящих в краевые условия w_i , v_i , u_i , используются правые разности (24):

$$\begin{aligned}
 w_{i,\varphi} &= (-3w_1 + 4w_2 - w_3)/2\Delta; \\
 v_{i,\varphi} &= (-3v_1 + 4v_2 - v_3)/2\Delta; \\
 u_{i,\varphi} &= (-3u_1 + 4u_2 - u_3)/2\Delta.
 \end{aligned} \tag{27}$$

Для переменной τ_φ условия (22) учитываются с помощью центральной разности

$$\tau_{\varphi_i,\varphi} \cong (\tau_{\varphi_2} - \tau_{\varphi_0})/2\Delta = -\tau_{\varphi_2}/2\Delta. \tag{28}$$

Первое и третье из условий (22) учитываются при аппроксимации производных от функции B по φ , σ_φ

$$\begin{aligned}
 \sigma_{\varphi_i,\varphi} &\cong (\sigma_{\varphi_2} - \sigma_{\varphi_0})/2\Delta = \sigma_{\varphi_2}/2\Delta = \left(a\sigma_{r_2} + \frac{b}{r}[(v_3 - v_1)/2\Delta + w_2] - cku_2 \right) / 2\Delta; \tag{29} \\
 B_{1,\varphi} &\cong (B_2 - B_0)/2\Delta = B_2/2\Delta = [(u_3 - u_1)/2\Delta / r - kv_2] / 2\Delta.
 \end{aligned}$$

Аналогичным образом представляются производные для прямой с номером $i=N$, учитывающие краевые условия при $\varphi = \frac{\varphi_0}{2}$. Единственное отличие состоит в замене правых конечных разностей левыми:

$i=N$:

$$\begin{aligned} w_{i,\varphi} &= (3w_N - 4w_{N-1} + w_{N-2})/2\Delta; \quad v_{i,\varphi} = (3v_N - \dots)/2\Delta; \\ U_{i,\varphi} &= (U_{i+1} - U_{i-1})/2\Delta; \quad u_{i,\varphi} = (3u_N - \dots)/2\Delta; \\ \tau_{\varphi,i,\varphi} &= -\tau_{\varphi(N-1)}/2\Delta; \quad \tau_{\varphi,i,\varphi} = (\tau_{\varphi(i+1)} - \tau_{\varphi(i-1)})/2\Delta; \\ \sigma_{i,\varphi} &= \left(a\sigma_{N-1} + \frac{b}{r}[(v_N - v_{N-2})/2\Delta + w_{N-1}] + cku_{N-1} \right) / 2\Delta = -\frac{\sigma_{N-1}}{2\Delta}, \\ B_{i,\varphi} &= -[(u_N - u_{N-2})/2\Delta/r - kv_{N-1}] / 2\Delta = -\frac{B_{N-1}}{2\Delta}. \end{aligned} \quad (30)$$

Число прямых можно уменьшить вдвое, если использовать условия антисимметрии поперечных колебаний пластинки при $\varphi = 0$

$$w = u = \sigma_\varphi = 0. \quad (31)$$

Соответствующие разностные соотношения, учитывающие условия (31) могут быть записаны в виде:

$i = N$:

$$\begin{aligned} w_{i,\varphi} &= -w_{N-1}/2\Delta; \quad u_{i,\varphi} = -u_{N-1}/2\Delta; \\ v_{i,\varphi} &= (3v_N - \dots)/2\Delta; \quad \tau_{\varphi,i,\varphi} = (3\tau_{\varphi N} - 4\tau_{\varphi(N-1)} + \tau_{\varphi(N-2)})/2\Delta; \\ \sigma_{i,\varphi} &= -\left(a\sigma_{N-1} + \frac{b}{r}[(v_N - v_{N-2})/2\Delta + w_{N-1}] + cku_{N-1} \right) / 2\Delta = -\frac{\sigma_{N-1}}{2\Delta}; \\ B_{i,\varphi} &= -(-2u_N + u_{N-1})/\Delta^2/r - kv_{i,\varphi}. \end{aligned} \quad (32)$$

Разрешающая система обыкновенных дифференциальных уравнений, согласно (21), имеет вид:

$$\begin{aligned} w_i' &= \sigma_i/k - a(ku_i + (w_i + v_{i,\varphi})/R); \quad v_i' = \tau_{\varphi i} + (v_i - w_{i,\varphi})/R; \\ u_i' &= \tau_{zi} + kw_i; \quad \sigma_i' = -\omega^2 w_i + [2((w_i + v_{i,\varphi})/R - w_i') - \tau_{\varphi i,\varphi}]/r - k\tau_{zi}; \\ \tau_{zi}' &= -\omega^2 u_i - (B_{i,\varphi} + \tau_{zi})/r + k(\sigma + 2(ku_i - w_i')); \\ \tau_{\varphi i}' &= -\omega^2 v_i + (\sigma_{i,\varphi} + 2\tau_{\varphi i})/r - k(u_{i,\varphi}/R - kv_i). \end{aligned} \quad (33)$$

В уравнениях (33) выражения для производных $w_{i\varphi}$, $v_{i\varphi}$, $u_{i\varphi}$, $\sigma_{i,\varphi}$, $\tau_{i,\varphi}$ выбираются из соотношений (29)–(32) в зависимости от краевых условий по координате φ . Условия свободной поверхно-

сти, эквивалентные условиям (20) и образующие вместе с уравнениями (33) краевую задачу, получаются в виде

$$B_i = 0, \tau_{\varphi i} = 0, \sigma_{\varphi} = 0 \quad (i=1, N). \quad (34)$$

Таким образом, исходная спектральная задача (19), (20), (22) с помощью дискретизации координаты φ , по методу прямых, сведена к канонической задаче (33), (34), для решения которой применим использовавшийся ранее метод ортогональной прогонки. В таблице приводятся предельные значения фазовой скорости первой кромочной моды в зависимости от угла клина. Найденные фазовые скорости для материала с коэффициентом Пуассона $\nu = 0,25$ по теории пластинок Кирхгофа–Лява (колонка 3), Тимошенко – (колонка 4), в рамках изложенной в этом параграфе методики расчета трехмерного клина (колонка 5–6) и по формуле $C_0 = C_u \sin(m\varphi) / 8$, $m = 1, 2, \dots, m\varphi < 90^\circ$ (колонка 6). Колонка 5 соответствует варианту расчета с тремя внутренними прямыми ($N = 3$) и краевыми условиями (17), колонка 6 соответствует краевым условиям:

$$\varphi = -\frac{\varphi_0}{2}: \sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{\varphi\eta} = \sigma_{\varphi z} = 0; \quad \varphi = 0: u_r = u_z = \sigma_{\varphi\varphi} = 0.$$

В соответствии с численными результатами приведенными в таблице, варианты расчета по методам Кирхгофа–Лява, Тимошенко и трехмерной теории согласуются между собой в пределах 7 % для углов клина с толщиной в основании h_2 , не превышающей 0,5 (угол клина $\varphi_0 = 28^\circ$). Отметим, что для угла $\varphi = 90^\circ$ предельная фазовая скорость вычислялась также в работах [16, 17, 18], где для нее приводится значение 0,901 ($\nu = 0,25$).

R^*	φ_0	К/Л	T	3(1)	3(2)	По работе [8]
0,2	11 ^o	0,2	0,196	–	–	0,182
0,3	17 ^o	0,3	0,286	0,308	0,298	0,276
0,5	28 ^o	0,5	0,442	0,475	0,462	0,433
0,7	38 ^o	0,7	0,563	0,605	0,592	0,574
1	53 ^o	1	0,691	0,741	0,729	0,736
2	90 ^o	2	0,864	0,908	–	0,92

Таким образом, в отличие от волноводов с прямоугольным сечением, в клиновидных волноводах с достаточно малым углом клина, при анализе дисперсионных зависимостей первой

моды, допустимо использовать теорию пластинок Кирхгофа–Лява. Установленный факт объясняется явлением локализации формы колебаний вблизи острого угла клина, описанный в [8].

Это явление следует рассматривать как характерную особенность динамического поведения пластинки переменной толщины.

Выводы

1. Выявлено, что в упругом цилиндре с радиальной трещиной отсутствуют волны, имеющие реальные части фазовой скорости, локализованные вблизи оси цилиндра.

2. Результаты расчета предельной скорости распространения первой моды в клиновидном волноводе по теории пластин Кирхгофа–Лява и по динамической теории упругости отличаются не более чем на 6 % для углов вершины клина, не превосходящих 28° . При $28^\circ < \varphi < 90^\circ$ результаты расчетов отличаются до 20 %. Таким образом, при малых углах клина допустимо применение упрощенной теории Кирхгофа–Лява и Тимошенко во всем волновом диапазоне.

3. Учет вязкоупругих свойств материала клина уменьшает реальные части скорости распространения волн на 10–15 %, а также позволяет оценить демпфирующей способности системы в целом.

Библиографический список

1. *Оное Макнивен Миндиллин*. Дисперсия осесимметричных волн в упругих стержнях / Тр. Американского общества инженеров–механиков. Прикладная механика, 1962. 62, № 4. С. 139–145.

2. *Уайт*. Поверхностные упругие волны. Тр. ин-та инженеров по электротехнике и радиоэлектронике. 1970. 58, № 8. С. 68–110.

3. *Ewing W.M., Jardetzku W.S., Press F.* Elastic Waves in Layered Media. McGraw–Hill. New York, 1962.

4. *Сафаров И.И., Джумаев З.Ф., Болтаев З.И.* Гармонические волны в бесконечном цилиндре с радиальной трещиной с учетом демпфирующей способности материала // Проблемы механики Узбекистана. 2011. № 3. С. 20–25.

5. *Сафаров И.И., Болтаев З.И.* Распространение гармонических волн в пластинке переменной толщины // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Серия: физико-математических наук, № 4. 2011. С. 31–39.

6. Сафаров И.И., Тешаев М.Х., Болтаев З.И. Математическое моделирование волнового процесса в механическом волноводе с учетом внутреннего трения. Германия. LAP. 2013. 243 с.

7. Safarov I.I., Akhmedov M.Sh., Boltaev Z.I. Dissemination Sinusoidal Waves in of A Viscoelastic Strip. Global Journal of Science Frontier Research: F Mathematics & Decision Sciences. 2015. Vol. 15. Issue 1 (Ver.1.0). P. 39–60.

8. Safarov I.I., Akhmedov M.Sh., Boltaev Z.I. Ducting in Extended Plates of Variable Thickness. Global Journal of Science Frontier Research: F Mathematics & Decision Sciences. 2016. Vol. 16. Issue 2 (Ver.1.0). P. 33–66.

9. Колтунов М.А. Ползучесть и релаксация. М.: Высшая школа, 1976. 276 с.

10. Сафаров И.И., Тешаев М.Х., Болтаев З.И. Распространение линейных волн в протяженных пластинчатых телах. LAP. Lambert Academic Publishing (Germany). 2016. 315 с.

11. Сафаров И.И., Ахмедов М.Ш., Болтаев З.И. Собственные волны в слоистых средах. Lambert Academic Publishing (Germany). 2016. 192 с.

12. Safarov I.I., Boltaev Z.I., Akhmedov M.Sh. Properties of wave motion in a fluid-filled cylindrical shell / LAP, Lambert Academic Publishing. 2016. 105 p.

13. Safarov I.I., Akhmedov M.Sh., Qilichov O. Dynamics of underground hiheline from the flowing fluid. Lambert Academic Publishing (Germany). 2016. 345 p.

14. Годунов С.К. О численных решениях краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Успехи математических наук, 1961. Т. 16, № 3. С. 171–174.

15. Мяченков В.И., Григорьев И.В. Расчет составных оболочечных конструкций на ЭВМ: справочник. М.: Машиностроение, 1981. 216 с.

16. Толитов Х.Б., Гуревич С.Ю., Геренштейн А.В. Распространение упругих волн в клине: моногр. Челябинск, 2003. 122 с.

17. Safarov I.I., Akhmedov M.Sh., Boltaev Z.I. Natural oscillations and diffraction of waves on the cylindrical body. Lambert Academic Publishing (Germany). 2016. 245 p.

18. Safarov I.I., Akhmedov M.Sh., Boltaev Z.I. Distribution of the natural waves of extended Lamellar viscoelastic bodies of variable thickness. LAP, Lambert Academic Publishing (Germany). 2015. 112 p.